Vierfeldertafel und Baumdiagramm

Aufgabe 1:

Der Verein der Modelleisenbahner will zahlreiche neue Lokomotiven einkaufen. Wegen des günstigeren Preises werden 60 % der Lokomotiven bei Firma A gekauft. Eine umfangreiche Kundenbefragung im Internet hat ergeben, dass 70 % der bei Firma A gekauften Lokomotiven einwandfrei sind. 40 % der Lokomotiven werden trotz des höheren Preises bei Firma B gekauft, weil die Internetbewertung mit nur 15 % defekter Lokomotiven besser ist.

a) (1) Stellen Sie den Sachverhalt in einer Vier-Felder-Tafel oder in einem Baumdiagramm dar. K3
   (2) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine gelieferte Lokomotive einwandfrei ist.
   (3) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine gelieferte defekte Lokomotive von der Firma A kommt.

b) Der Verein möchte einen „Tag der offenen Tür" veranstalten. Ein Mitglied hat 100 Lokomotiven aus dem vorhandenen Bestand getestet und festgestellt, dass 15 defekt sind. Leider hat er diese nicht gekennzeichnet.

   Für das Schaufahren am „Tag der offenen Tür" werden nun drei Lokomotiven zufällig ausgewählt.
   Begründen Sie, dass die Zufallsgröße „Anzahl der defekten Lokomotiven" nicht binomialverteilt ist.
   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
   E_1: Genau eine der drei Lokomotiven ist defekt.
   E_2: Weniger als zwei Lokomotiven sind defekt.
   E_3: Spätestens die dritte eingesetzte Lokomotive ist defekt.

Aufgabe 2:

Langfristige Untersuchungen haben ergeben, dass 2 % aller Autofahrer unter Alkoholeinfluss stehen.
An einer Überwachungsstelle wird die Geschwindigkeit von 1000 Autofahrern kontrolliert, wobei 120 Übertretungen beobachtet werden. Die Polizei stellt fest, dass 15 % der Geschwindigkeitssünder Alkohol im Blut haben.

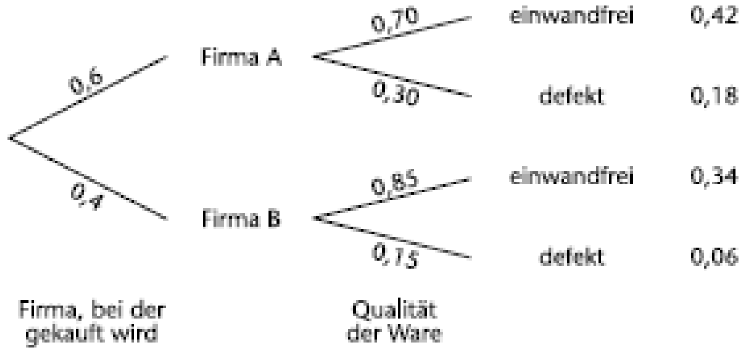
a) (1) Stellen Sie den Sachverhalt in einem Baumdiagramm oder einer Vier-Felder-Tafel dar. K3
   (2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
   - jemand, der Alkohol im Blut hat, zu schnell fährt.
   - jemand, der nicht zu schnell fährt, Alkohol im Blut hat.

   (3) Beurteilen Sie die Behauptung: „Nur 15 % aller Geschwindigkeitssünder haben Alkohol im Blut, also sind die restlichen 85 % nüchtern. Deswegen fährt man mit Alkohol ganz offensichtlich vorsichtiger."

b) Es gilt weiterhin, dass 2 % aller Autofahrer unter Alkoholeinfluss stehen. K3 K4
   Die Polizei führt ein Alkohol-Messgerät ein, das zu 99 % sicher ist. Das bedeutet, dass 99 % aller getesteten Alkoholsünder erkannt werden, während auch 99 % aller Nüchternen richtig eingeschätzt werden. Bei einem zufällig ausgewählten Fahrer zeigt das Messgerät Alkoholkonsum an.
   Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Fahrer trotz der Anzeige des Gerätes keinen Alkohol im Blut hat.
   Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

Lösung

a) (1) Wir stellen den Vorgang als 2-stufigen Zufallsversuch dar:

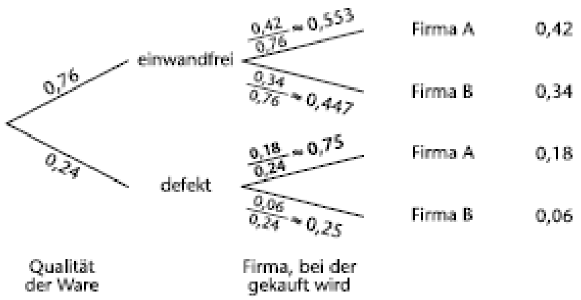


und in Form einer Vier-Felder-Tafel

	Firma A	**Firma B**	**gesamt**
einwandfrei	0,42	0,34	0,76
defekt	0,18	0,06	0,24
gesamt	0,60	0,40	1

(2) Aus der Vier-Felder-Tafel lesen wir ab, dass 76 % der gelieferten Lokomotiven einwandfrei sind.

(3) Aus der Vier-Felder-Tafel kann man das umgekehrte Baumdiagramm entwickeln:



Die Wahrscheinlichkeit, dass eine defekte Lokomotive von der Firma A geliefert wurde, beträgt 75 %.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit kann auch ohne die Zwischenschritte Vier-Felder-Tafel – Umgekehrtes Baumdiagramm mithilfe des Satzes von Bayes berechnet werden.

b) Die Lokomotiven werden nach dem „Test" nicht wieder zurückgestellt, es muss mit „Ziehen ohne Zurücklegen" modelliert werden. Deshalb liegt keine Binomialverteilung vor.

$$P(E_1) = \frac{15}{100} \cdot \frac{85}{99} \cdot \frac{84}{98} + \frac{85}{100} \cdot \frac{15}{99} \cdot \frac{84}{98} + \frac{85}{100} \cdot \frac{84}{99} \cdot \frac{15}{98} = \frac{51}{154} \approx 0,33$$

$$P(E_2) = P(\text{keine defekt}) + P(E_1) = 1 - \frac{85}{100} \cdot \frac{84}{99} \cdot \frac{83}{98} + \frac{51}{154} = \frac{1088}{1155} \approx 0,94$$

Das Ereignis *Spätestens die dritte Lokomotive ist defekt* bedeutet: *Die erste oder die zweite oder die dritte Lokomotive ist defekt.* Das Gegenereignis hierzu ist: *Keine der drei Lokomotiven ist defekt.*

$$P(E_3) = 1 - P(\text{keine defekt}) = 1 - \frac{85}{100} \cdot \frac{84}{99} \cdot \frac{83}{98} = \frac{899}{2310} \approx 0,39$$

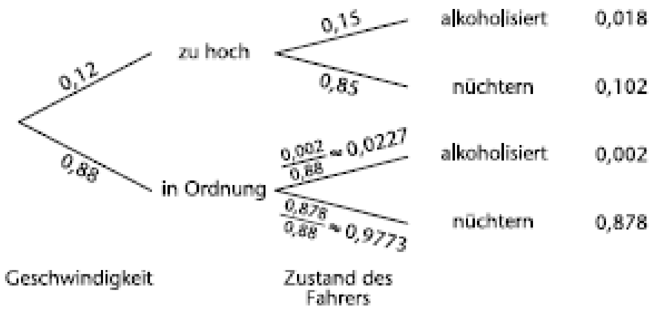
Lösung

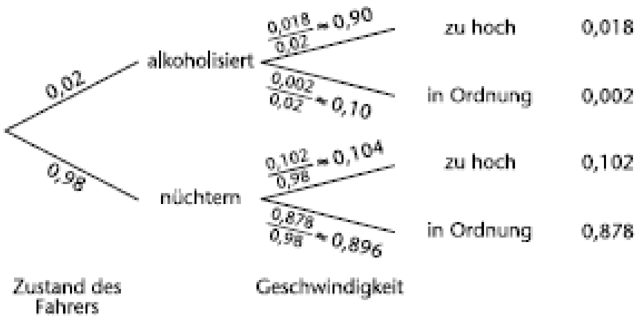
a) (1) Aus den Informationen des Aufgabentextes lässt sich am einfachsten eine Vier-Felder-Tafel mit absoluten Häufigkeiten erstellen. Man kann dabei davon ausgehen, dass 2 % von 1000, also 20 Alkoholsünder, unter den 1000 kontrollierten Autofahrern sind. 15 % von 120 Verkehrssündern hatten Alkohol im Blut, das sind 18 Personen.

Aus den gegebenen Daten (in Blau) erschließen wir die fehlenden Daten:

	Geschwindigkeit zu hoch	Geschwindigkeit in Ordnung	gesamt
alkoholisiert	18	2	20
nüchtern	102	878	980
gesamt	120	880	1000

Zu dieser Vier-Felder-Tafel gehören zwei Baumdiagramme:

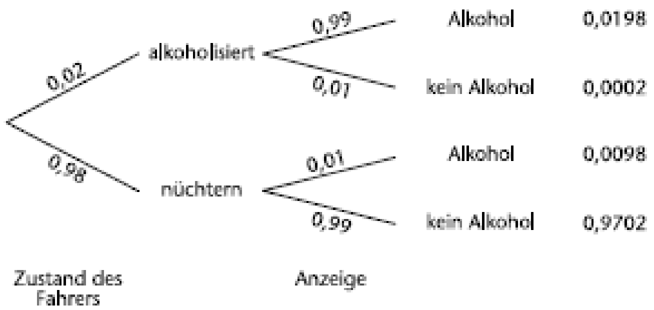




(2) Die beiden gesuchten Wahrscheinlichkeiten kann man aus den Baumdiagrammen direkt ablesen oder aus der Vier-Felder-Tafel durch Quotientenbildung bestimmen:
$P_{\text{alkoholisiert}}(\text{zu schnell}) = 0,90 = 90\,\%$
$P_{\text{nicht zu schnell}}(\text{alkoholisiert}) \approx 0,023 = 2,3\,\%$

(3) Die Aussage ist falsch.
Man darf die Wahrscheinlichkeiten der beiden Ereignisse $P_{\text{alkoholisiert}}(\text{zu schnell}) = 90\,\%$ und $P_{\text{zu schnell}}(\text{alkoholisiert}) = 15\,\%$ nicht miteinander verwechseln.

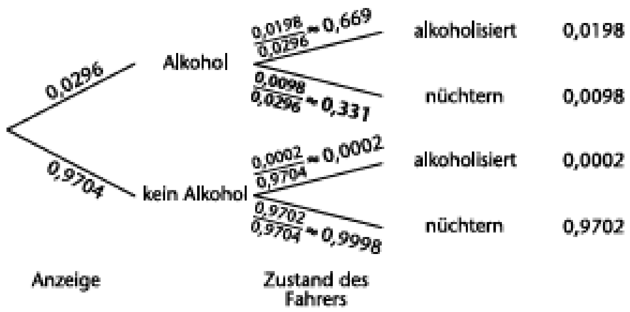
b) Aus den Informationen der Aufgabenstellung ergibt sich das folgende Baumdiagramm:



Hieraus ergibt sich die folgenden Vier-Felder-Tafel …

	Anzeige „Alkohol“	**Anzeige „kein Alkohol“**	**gesamt**
alkoholisiert	0,0198	0,0002	0,02
nüchtern	0,0098	0,09702	0,98
gesamt	0,0296	0,9704	1

… und hieraus das umgekehrte Baumdiagramm:



Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fahrer, bei dem Alkoholkonsum angezeigt wird, tatsächlich keinen getrunken hat, beträgt ca. 33 %. Dies bedeutet, dass aufgrund der Anzeige des Geräts keine sicheren Schlüsse über Alkoholkonsum möglich sind.